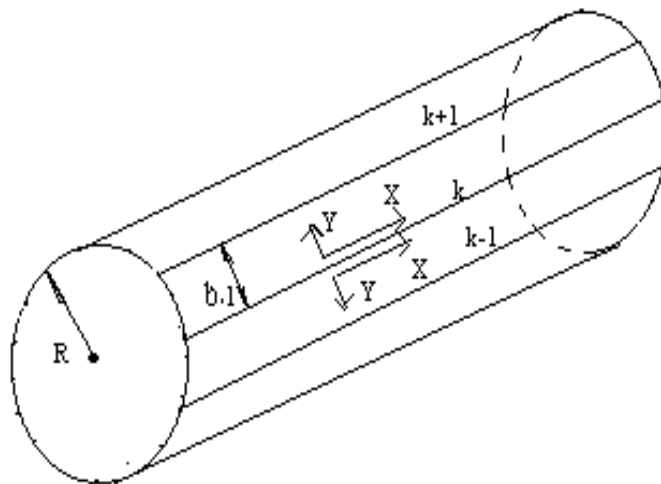


## **ВІЛЬНІ КОЛИВАННЯ ТРИШАРОВОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ЛЕГКИМ ЗАПОВНЮВАЧЕМ, ЯКА ПІДКРІПЛЕНА ПОЗДОВЖНИМИ РЕБРАМИ ЖОРСТКОСТІ**

**В.Л.КИРИЧЕНКО** – к.т.н, доцент,  
**Т.А.ЄМЕЛЬЯНОВА** – пошукувач, Херсонський ДАУ

Розглядається замкнена тришарова циліндрична оболонка з легким трансверсально – ізотропним заповнювачем, яка підкріплена поздовжніми ребрами однакової жорсткості та розташованими на однакових відстанях одне від одного (рис. 1). Для зовнішніх несучих шарів панелі прийняті гіпотези Кірхгофа – Лява, для заповнювача – лінійний закон зміни тангенціальних переміщень за товщиною. Поперечні деформації заповнювача не враховуються. Для ребер прийняті гіпотези Бернуллі та враховується тільки згин ребер в вертикальній площині [1].



**Рисунок 1. Схема тришарової циліндричної оболонки  
підкріпленої повздовжніми ребрами жорсткості**

Варіаційним шляхом, використовуючи функціонал – дію за Остроградським – Гамільтоном, отримані диференціальні рівняння згинальних коливань участка оболонки, замкненого між ребрами, а також умови по лініях ребер і по краях оболонки [2].

Диференціальні рівняння згинальних коливань ділянки оболонки, розташованої між ребрами, які отримані з варіаційного рівняння, будуть мати вигляд:

$$\nabla^4 \Phi - \frac{\bar{B}}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \varphi - \frac{Bh}{G_3} \nabla^2 \varphi \right) = 0 \quad (1)$$

$$\nabla^4 \varphi - \frac{1}{RD^*} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - m_{o\delta} \omega^2 \left( \varphi - \frac{Bh}{G_3} \nabla^2 \varphi \right) = 0 \quad (2)$$

$$\Psi - \frac{1-\mu}{2G_3} Bh \nabla^2 \Psi = 0 \quad (3)$$

В (1) – (3) позначено:

$$\bar{B} = 2(1 - \mu^2)B; \quad B = \frac{E\delta}{1 - \mu^2}; \quad D^* = 2BH^2; \quad H = h + 0,5\delta; \quad \delta, 2h -$$

товщина зовнішніх шарів та заповнювача;  $G_3$  – модуль зсуву заповнювача;  $E, \mu$  – модуль пружності і коефіцієнт Пуассона зовнішніх шарів.

Систему рівнянь (1) і (2) можна привести до одного розв'язуючого рівняння, якщо ввести в розгляд функцію  $F(x, y)$  та прийняти:

$$\varphi = \nabla^4 F, \quad \Phi = -\frac{\bar{B}}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( F - \frac{Bh}{G_3} \nabla^2 F \right) \quad (4)$$

Тоді система рівнянь (1) і (2) приводиться до вигляду:

$$\nabla^4 \nabla^4 F + \frac{\bar{B}}{R^2 D^*} \frac{\partial^4}{\partial x^4} \left( 1 - \frac{Bh}{G^3} \nabla^2 \right) F - \frac{\omega^2 m_{o\delta}}{D^*} \left( 1 - \frac{Bh}{G^3} \nabla^2 \right) \nabla^4 F = 0 \quad (5)$$

Рішення рівняння (5) шукаємо у вигляді:

$$F = f_1(y) \sin \frac{n\pi}{a} x; \quad (6)$$

де:  $a$  – довжина оболонки.

Підставляючи вираз (6) в рівняння (5), отримуємо диференціальне рівняння, яке визначає функцію  $f_1(y)$ :

$$f_1(y) = A_1 sh \beta_1 y + A_2 ch \beta_1 y + A_3 sh \beta_2 y + A_4 ch \beta_2 y + A_5 sh \beta_3 y + A_6 ch \beta_3 y + A_7 sh \beta_4 y + A_8 ch \beta_4 y; \quad (7)$$

Тут  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$  – корні характеристичного рівняння

$$(\beta^2 - \alpha_n^2)^4 + \alpha_n^2 [1 + K_0 (\alpha_n^2 - \beta^2)] [\alpha^2 \alpha_n^2 - m_\omega (\beta^2 - \alpha_n^2)^2] = 0 \quad (8)$$

$$\beta_{1,2} = \frac{1}{R} \sqrt{-\frac{C_1 + A}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{C_1 + A}{4}\right)^2 - \left(y + \frac{C_1 y - C_4}{A}\right)}};$$

$$\beta_{3,4} = \frac{1}{R} \sqrt{-\frac{C_1 - A}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{C_1 - A}{4}\right)^2 - \left(y - \frac{C_1 y - C_4}{A}\right)}}; \quad (9)$$

$$y = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} + \frac{C_2}{6}; \quad A = \sqrt{8y + C_1^2 - 4C_2};$$

$$p = \frac{3(C_1 C_3 - 4C_4) - C_2^2}{36}; \quad q = \frac{C_2(9C_1 C_3 + 72C_4 - 2C_2^2) - 27(C_1^2 C_4 - C_3^2)}{432};$$

$$C_1 = (K_0 m_\omega - 4)\alpha_n^2; \quad C_2 = \alpha_n^2 [3\alpha_n^2 (2 - K_0 m_\omega) - m_\omega];$$

$$C_3 = \alpha_n^4 [m_\omega (2 + 3K_0 \alpha_n^2) - K_0 \alpha_n^2 - 4\alpha_n^2];$$

$$C_4 = \alpha_n^4 [\alpha_n^4 + (1 + K_0 \alpha_n^2)(\alpha_n^2 - m_\omega \alpha_n^2)]; \quad (9)$$

$$k_0 = \frac{\pi^2 B h}{G_3 b^2}; \quad \alpha^2 = \frac{\bar{B} b^4}{R^2 D^* \pi^4}; \quad m_\omega = \frac{m_{o\delta} \omega^2 b^2}{\pi^2 D^* \alpha_n^2};$$

$$D^* = 2BH^2; \quad \bar{B} = 2(1 - \mu^2)B; \quad B = \frac{E\delta}{1 - \mu^2}.$$

Рішення рівняння (3) одержано у вигляді:

$$\Psi = f_2(y) \cos \frac{\pi n}{a} x. \quad (10)$$

Підставляючи вираз (10) в рівняння (3), отримуємо диференціальне рівняння для визначення функції  $f_2(y)$ :

$$f_2(y) = A_9 \operatorname{sh} \beta_5 y + A_{10} \operatorname{ch} \beta_5 y \quad (11)$$

$$\text{Тут } \beta_5 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2}{(1 - \mu)K_0} + \alpha_n^2} \quad (12)$$

Приймаючи для кожної ділянки свої вісі координат, розташуємо початок координат на початку кожної ділянки (це показано для  $k+1$  ділянки, яка знаходиться між  $k$ -им і  $k+1$ -им ребром) та позначимо  $f_1(y)$  на початку і на кінці ділянки (при  $y=0$  і  $y=b_1$ , де  $b_1$  - відстань між ребрами) через  $\eta_k$  і  $\eta_{k+1}$ , значення  $f_1''(y)$  через  $\mu_k$  і  $\mu_{k+1}$ , значення  $f_1^{IV}(y)$  через  $\zeta_k$  і  $\zeta_{k+1}$ , значення  $f_1^{VI}(y)$  через  $\xi_k$  і  $\xi_{k+1}$ , значення  $f_2''(y)$  через  $\varphi_k$  і  $\varphi_{k+1}$ .

Використовуючи ці умови виражаємо через них довільні постійні рішення рівнянь (8) і (11). Використовуючи умови  $y = 0$ , отримуємо систему рівнянь:

$$A_2 + A_4 + A_6 + A_8 = \eta_k;$$

$$\beta_1^2 A_2 - \beta_2^2 A_4 + \beta_3^2 A_6 + \beta_4^2 A_8 = \mu_k;$$

$$\beta_1^4 A_2 + \beta_2^4 A_4 + \beta_3^4 A_6 + \beta_4^4 A_8 = \zeta_k;$$

$$\beta_1^6 A_2 + \beta_2^6 A_4 + \beta_3^6 A_6 + \beta_4^6 A_8 = \xi_k;$$

$$\beta_5 A_9 = \varphi_k. \quad (13)$$

Використовуючи умови  $y = b_1$ , отримуємо систему рівнянь (14):

$$\begin{aligned}
& A_1 \operatorname{sh} \beta_1 b_1 + A_3 \operatorname{sh} \beta_2 b_1 + A_5 \operatorname{sh} \beta_3 b_1 + A_7 \operatorname{sh} \beta_4 b_1 = \eta_{k+1} - A_2 \operatorname{ch} \beta_1 b_1 - \\
& - A_4 \operatorname{ch} \beta_2 b_1 - A_6 \operatorname{ch} \beta_3 b_1 - A_8 \operatorname{ch} \beta_4 b_1 ; \\
& A_1 \beta_1^2 \operatorname{sh} \beta_1 b_1 + A_3 \beta_2^2 \operatorname{sh} \beta_2 b_1 + A_5 \beta_3^2 \operatorname{sh} \beta_3 b_1 + A_7 \beta_4^2 \operatorname{sh} \beta_4 b_1 = \\
& = \mu_{k+1} - A_2 \beta_1^2 \operatorname{ch} \beta_1 b_1 - A_4 \beta_2^2 \operatorname{ch} \beta_2 b_1 - A_6 \beta_3^2 \operatorname{ch} \beta_3 b_1 - A_8 \beta_4^2 \operatorname{ch} \beta_4 b_1 ; \\
& A_1 \beta_1^4 \operatorname{sh} \beta_1 b_1 + A_3 \beta_2^4 \operatorname{sh} \beta_2 b_1 + A_5 \beta_3^4 \operatorname{sh} \beta_3 b_1 + A_7 \beta_4^4 \operatorname{sh} \beta_4 b_1 = \\
& = \zeta_{k+1} - A_2 \beta_1^4 \operatorname{ch} \beta_1 b_1 - A_4 \beta_2^4 \operatorname{ch} \beta_2 b_1 - A_6 \beta_3^4 \operatorname{ch} \beta_3 b_1 - A_8 \beta_4^4 \operatorname{ch} \beta_4 b_1 ; \\
& A_1 \beta_1^6 \operatorname{sh} \beta_1 b_1 + A_3 \beta_2^6 \operatorname{sh} \beta_2 b_1 + A_5 \beta_3^6 \operatorname{sh} \beta_3 b_1 + A_7 \beta_4^6 \operatorname{sh} \beta_4 b_1 = \\
& = \xi_{k+1} - A_2 \beta_1^6 \operatorname{ch} \beta_1 b_1 - A_4 \beta_2^6 \operatorname{ch} \beta_2 b_1 - A_6 \beta_3^6 \operatorname{ch} \beta_3 b_1 - A_8 \beta_4^6 \operatorname{ch} \beta_4 b_1 ; \\
& A_9 \beta_5 \operatorname{sh} \beta_5 b_1 + A_{10} \beta_5 \operatorname{ch} \beta_5 b_1 = \varphi_{k+1}.
\end{aligned}$$

При розгляді  $k$ -ої ділянки початок координат приймаємо на його кінці та спрямовуємо вісь  $y$  в протилежну сторону. Тоді для нього  $f_1(y)$  і  $f_2(y)$  будуть мати такий самий вигляд, як (7) і (11), а довільні постійні  $A_i$  будуть визначатися з рівнянь (13) і (14), якщо в них замінити  $\eta_{k+1}, \mu_{k+1}, \zeta_{k+1}, \xi_{k+1}, \varphi_{k+1}$  на  $\eta_{k-1}, \mu_{k-1}, \zeta_{k-1}, \xi_{k-1}, \varphi_{k-1}$ .

Умови по лініям ребер запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)_{y=+0} + \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)_{y=-0} = \frac{B_p}{2B(1-\mu^2)} \left( \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2} - \mu \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} \right)_{y=0} ; \\
& (V_\alpha)_{y=+0} = -(V_\alpha)_{y=-0} ; \quad \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{y=+0} = - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_{y=-0} ; \\
& \left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} \right)_{y=-0} + \left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial y} \right)_{y=+0} = \\
& - \left[ \frac{D_p}{D^*} \left( 1 - \frac{Bh}{G_3} \nabla^2 \right) \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \frac{m_p \omega^2}{D^*} \left( 1 - \frac{Bh}{G_3} \nabla^2 \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right]_{y=0} ; \\
& \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{Bh}{G_3} \nabla^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{y=0} = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

З урахуванням виразів (4), підставляючи рішення (7) та враховуючи, що інші умови такі самі, як у пологої оболонки, умови по лініях ребер запишуться так:

$$\begin{aligned}
 & \beta_1 e_1 (A_1^{k+1} + A_1^{k-1}) - \beta_2 e_2 (A_3^{k+1} + A_3^{k-1}) + \beta_3 e_3 (A_5^{k+1} + A_5^{k-1}) + \\
 & + \beta_4 e_4 (A_7^{k+1} + A_7^{k-1}) - \\
 & - \delta_\omega [(1 + K_0 \alpha_n^2 - K_0) \mu \alpha_n^2 \mu_k - K_0 \zeta_k + \mu \alpha_n^2 (1 + K_0 \alpha_n^2) \eta_k] = 0; \\
 & \beta_1 e_1 e_9 (A_1^{k+1} + A_1^{k-1}) + \beta_2 e_2 e_{10} (A_3^{k+1} + A_3^{k-1}) + \\
 & + \beta_3 e_3 e_{11} (A_5^{k+1} + A_5^{k-1}) + \beta_4 e_4 e_{12} (A_7^{k+1} + A_7^{k-1}) = 0; \quad (16) \\
 & \beta_1 e_5^2 (A_1^{k+1} + A_1^{k-1}) + \beta_2 e_6^2 (A_3^{k+1} + A_3^{k-1}) + \beta_3 e_7^2 (A_5^{k+1} + A_5^{k-1}) + \\
 & + \beta_4 e_8^2 (A_7^{k+1} + A_7^{k-1}) + \alpha_n (A_{10}^{k+1} + A_{10}^{k-1}) = 0; \\
 & \beta_1 e_5^3 (A_1^{k+1} + A_1^{k-1}) + \beta_2 e_6^3 (A_3^{k+1} + A_3^{k-1}) + \beta_3 e_7^3 (A_5^{k+1} + A_5^{k-1}) + \\
 & + \beta_4 e_8^3 (A_7^{k+1} + A_7^{k-1}) - f [\alpha_n^4 (1 + K_0 \alpha_n^2) \eta_k - \alpha_n^2 (2 - 3K_0 \alpha_n^2) \mu_k + (1 + 3K_0 \alpha_n^2) \zeta_k - K_0 \xi_k] = 0; \\
 & - K_0 \alpha_n^7 \eta_k + 3K_0 \alpha_n^5 \mu_k - 3K_0 \alpha_n^3 \zeta_k + K_0 \alpha_n \xi_k + \varphi_k = 0.
 \end{aligned}$$

Тут позначено:

$$e_i = 1 + K_0 e_{4+i}; \quad e_{4+i} = \alpha_n^2 + \beta_i^2; \quad e_{8+i} = \beta_i^2 - \alpha_n^2 (2 - \mu); \quad i = 1, 2, 3, 4;$$

$$f = \alpha_n^2 (\alpha_n^2 \gamma - \delta_\omega m_\omega); \quad \delta_\omega = \frac{2\rho_p b_p h}{2(\rho_3 h + \rho_H \delta) b}; \quad \delta_B = \frac{E_p}{E} \delta_\omega; \quad \gamma = \frac{D_p}{D^* R}.$$

Підставляючи в (16) значення  $A_i^{k+1}$  і  $A_i^{k-1}$ , які визначаються з (14), отримаємо систему рівнянь в скінчених різницях [3].

Невідомі  $\eta_k, \mu_k, \zeta_k, \xi_k, \varphi_k$ , які входять до цієї системи, повинні задовольняти умовам періодичності рішення, які мають вигляд:

$$\eta_k = \eta_{k+m}; \quad \mu_k = \mu_{k+m}; \quad \zeta_k = \zeta_{k+m}; \quad \xi_k = \xi_{k+m}; \quad \varphi_k = \varphi_{k+m}. \quad (17)$$

де:  $m$  – число ребер.

Рішення рівнянь (16) шукаємо у вигляді:

$$\begin{aligned}
 \eta_k &= A \cos \frac{2\pi s k}{m}; \quad \mu_k = B \cos \frac{2\pi s k}{m}; \quad \zeta_k = C \cos \frac{2\pi s k}{m}; \\
 \xi_k &= M \cos \frac{2\pi s k}{m}; \quad \varphi_k = E \cos \frac{2\pi s k}{m}; \quad 1 \leq s \leq m-1, \quad (18)
 \end{aligned}$$

який задовольняє умовам (17).

Підставляючи (18) в рівняння (16) та враховуючи, що

$$\cos \frac{2\pi s(k+1)}{m} + \cos \frac{2\pi s(k-1)}{m} = 2 \cos \frac{2\pi s k}{m} \cos \frac{2\pi s}{m};$$

отримаємо систему однорідних рівнянь відносно невідомих  $A, B, C, M, E$ , яка не залежить від номеру  $k$ .

Таким чином, якщо прирівняти нулю визначник, складений з коефіцієнтів при  $A, B, C, M, E$ , отримаємо частотне рівняння тришарової замкненої циліндричної оболонки, яка підкріплена поздовжніми ребрами жорсткості. Надалі дослідження оболонки такого типу будуть продовжені.

**Література:**

1. Прочность. Устойчивость. Колебания /Под ред. И.А.Бюргера и Я.Г.Пановко. – М.: Машиностроение, том 3, 1968.
2. Кириченко В.Л. Свободные колебания трехслойных пластин, подкрепленных ребрами жесткости //Труды первой республиканской конференции молодых ученых по механике твердого деформируемого тела. – К., 1969.
3. Блейх Ф., Мелан Е. Уравнения в конечных разностях статики сооружений /ДНТВУ, научно-техническое издательство Украины - Харьков, 1936.

УДК 624.014

## **ОПТИМІЗАЦІЯ ВИСОТИ СТАЛЕВОЇ ЗВАРНОЇ ДВОТАВРОВОЇ БАЛКИ НА ДІЛЯНКАХ БІЛЯ ОПОР**

**О.Є.ЯНІН - к.т.н., доцент, Херсонський ДАУ**

В умовах ринкової економіки достатньо актуальним стає зменшення витрат матеріалу на будівельні конструкції. За їх масового серійного виготовлення економічний ефект, отриманий за рахунок економії матеріалу, може зіграти важливу роль. Тому доцільно розглянути можливість проектування сталевих зварних балок, виходячи з мінімальних витрат сталі.

Розглянемо однопролітну шарнірно-обперту балку, завантажену рівномірно-розподіленим лінійним навантаженням (рис.1).

Припустимо, що її складений двотавровий поперечний переріз підібраний по максимальному згинальному моменту посередині прольоту ( $M_{max}$ ) із умови міцності за нормальними напруженнями [1]. Із віддаленням від середини прольоту до опор згинальні моменти ( $M$ ) зменшуються. Отже, зменшується потрібний момент опору

$$W_{нотр} = \frac{M}{R_y \gamma_c}, \quad (1)$$

де  $R_y$  – розрахунковий опір сталі стиску, розтягу та згину за межею текучості;

$\gamma_c$  – коефіцієнт умов роботи.

Тому, з метою економії сталі можна зменшувати розміри поперечного перерізу балки на приопорних ділянках. Це досягається зокрема за рахунок зменшення її висоти ( $h$ ).

Виходячи з умови міцності на зріз, прийнята висота балки на опори повинна задовольняти умові [2]